**五月数学每周好题精选（第3周）**

1.设集合，，.若，，则( )

A. B. C.1 D.3

2.若，则( )

A.1 B.-1 C. D.

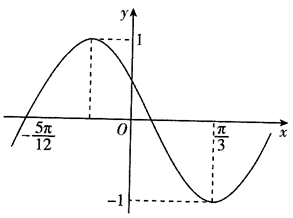
3.设，，，则( )

A. B. C. D.

4.已知向量，，且，则向量***a***，***b***的夹角是( )

A. B. C. D.

5.已知, 其导函数的图像如图所示, 则在内的极值点个数为( )



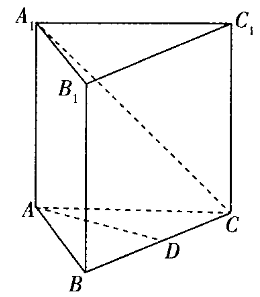
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6.已知点*O*为坐标原点，点*F*是椭圆的左焦点，点*A*，*B*分别为椭圆*C*的左、右顶点.点*P*为椭圆*C*上一点，且轴.过点*A*的直线*l*与线段*PF*交于点*M*，与*y*轴交于点*E*.若直线*BM*经过*OE*的中点，则椭圆*C*的离心率为( )

A. B. C. D.



7.如图，在直三棱柱中，，，点*D*为*BC*的中点，则异面直线*AD*与所成的角为( )



A. B. C. D.

8.将函数的图象向左平移个单位后得到的图象关于*y*轴对称，则正数的最小值是( )

A. B. C. D.

9.设等差数列，的前*n*项和分别为若则使成立的*n*的个数为( )

A.3 B.4 C.5 D.6

10.（多选）已知函数有三个不同的零点，则实数*a*的取值可以为( )

A.0 B. C.3 D.4

11.（多选）已知,且,则( )

A. B. C. D.

12.（多选）已知椭圆的左、右焦点分别为，，长轴长为4，点在椭圆内部，点*Q*在椭圆上，则以下说法正确的是( )

A.离心率的取值范围为

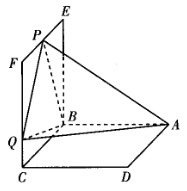
B.当离心率为时，的最大值为

C.存在点*Q*使得

D.的最小值为1

13.在的展开式中含项的系数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.（用数字作答）

14.如图，已知边长为1的正方形*ABCD*与正方形*BCFE*所在平面互相垂直，*P*为*EF*的中点，*Q*为线段*FC*上的动点，当三棱锥的体积最大时，三棱锥的外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_.



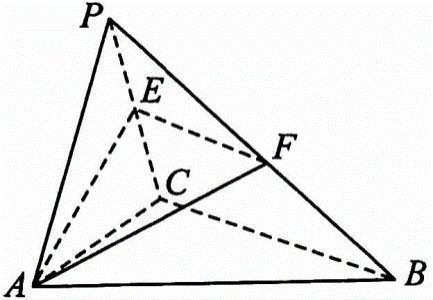
15.某大学一寝室4人参加疫情防控讲座，4人就坐在一排有13个空位的座位上，根据防疫要求，任意两人之间需间隔1米以上（两个空位），则不同的就坐方法有\_\_\_\_\_\_\_种.

16.已知数列的前*n*项和，数列满足.

（1）求证：数列是等差数列；

（2）设，数列的前*n*项和为，求满足的*n*的最大值.

17.如图，在三棱锥中，侧面底面*ABC*，，是边长为2的正三角形，，*E*，*F*分别是*PC*，*PB*的中点，记平面*AEF*与平面*ABC*的交线*l*.



（1）证明：直线平面*PAC*.

（2）若*Q*在直线*l*上且为锐角，当时，求二面角的余弦值.

18.已知，分别是双曲线的左、右焦点，，*P*是*C*上一点，，且.

（1）求双曲线*C*的标准方程.

（2）经过点的直线*l*与双曲线*C*交于*A*，*B*两点，过点*A*作直线的垂线，垂足为*D*，过点*O*作（*O*为坐标原点），垂足为*M*.则在*x*轴上是否存在定点*N*，使得为定值？若存在，求出点*N*的坐标；若不存在，请说明理由.

**答案以及解析**

1.答案：B

解析：因为，故，故或，

若，则，，此时，符合；

若，则，，此时，不符合.故选B.

2.答案：C

解析：因为，故.故选C.



3.答案：C

解析：由对数的运算性质，得，，所以，故.因为，所以，于是.故选C.

4.答案：D

解析：因为，所以，所以，则，故向量***a***，***b***的夹角是.故选D.

5.答案：B

解析：因为, 所以.

设的最小正周期为*T*, 由题图得, 解得, 所以.

由题图得, 所以，, 将点  的坐标代入 的解析式, 得, 解得，, 即，,

因为, 所以, 所以, 所以.



所以，.



因为, 所以.



由, 得, 即, 可得, 解得.



则在  内的极值点个数为1 . 故选B.

6.答案：A

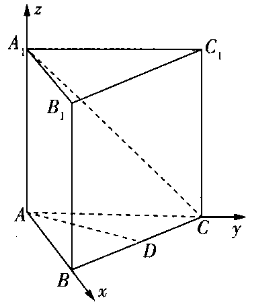
解析：不妨设*OE*的中点为*N*，，直线*l*的方程为，令可得，令，可得，所以，又易知，所以，整理可得.故选A.



7.答案：B

解析：解法一 ：取的中点，连接，.易证，故，所成的角就是*AD*，所成的角.，，*D*为*BC*的中点，，，，又，，，为直角三角形，，即异面直线*AD*与所成的角为，故选B.

解法二 ：易知*AB*，*AC*，两两垂直，以*A*为坐标原点，*AB*，*AC*，所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，则，，，，，，，，即异面直线*AD*与所成的角为.故选B.



8.答案：D

解析：将函数的图象向左平移个单位后，可得函数的图象，再根据得到的图象关于*y*轴对称，可得，，即，，令，可得正数的最小值是，故选D.

9.答案：C

解析：因为等差数列的前*n*项和分别为，  
所以.  
又所以，  
要使只需又所以的可能取值为2，3，4，6，12，  
因此*n*的可能取值为1，2，3，5，11，共5个. 故选C.

10.答案：CD

解析：本题考查根据函数零点个数求参数的取值范围.当时，恒成立，即在区间上无零点，所以当时，有三个正根，解得或.当时，单调递增，且，则方程有一个根，则方程要有两个根，即有两个正数解，则，解得，故C、D项正确. 故选CD.

11.答案：AC

解析：因为,所以,又,所以,

所以,

所以,

A正确.,B错误. ,C正确. ,D错误. 故选AC.

12.答案：BD

解析：本题考查椭圆的几何性质、椭圆中的最值问题、向量的数量积.由题意可得，所以，由点在椭圆内部可得，可得，即，所以，对A，离心率，所以，故A错误；

对B，当时，，，，故B正确；

对C，假设点*Q*存在，因为当*Q*在短轴端点时，最大，所以此时，由A知，所以，故的最大值小于90°，所以不存在点*Q*使得，故C错误；

对D，，当且仅当时取等号，故D正确.故选BD.

13.答案：30

解析：本题考查二项式定理及其应用.由于的展开式中，，故二项展开式中项的系数为.的二项展开式的通项公式（其中，，）.

14.答案：

解析：由题意知三棱锥的体积最大时，点*Q*与点*C*重合，则问题转化为求三棱锥外接球的表面积.过点*P*作，垂足为*G*，由正方形*ABCD*与正方形*BCFE*所在平面互相垂直，得平面*ABC*.设三棱锥外接球的球心为*O*，*AC*的中点为，连接，*OP*，*OA*，则平面.延长到点*H*，使，连接*PH*，.设，则，易知，则，解得，设外接球的半径为*R*，则，则所求外接球的表面积.

15.答案：840

解析：先假设每人坐一个位置相当于去掉4个位置，再将4人中间任意两人之间放进2个空位，

此时空位一共还剩3个，若将这三个连在一起插入4人之间和两侧的空位上，有5种放法；

若将这三个分成两组，一组两个，一组一个，插入4人之间和两侧的空位上，有种放法；

若将这三个分成三组插入4人之间和两侧的空位上，有种放法，

故不同的就坐方法为种.

故答案为：840.

16. 解析：（1）证明:因为

当时，，

所以，化简得，

因为，所以.

当时，.

当时，，即又

所以，数列是首项和公差均为1的等差数列.

（2）由（1）得，所以.

所以

所以，

由得，所以，所以*n*的最大值为4.

17. 解析：（1）*E*，*F*分别是*PC*，*PB*的中点，，又平面*AEF*，

平面*AEF*，平面*AEF*，

平面*ABC*，平面平面，，

平面平面*ABC*，平面平面，

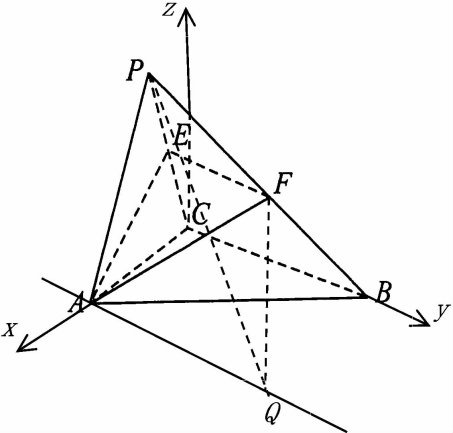
平面*PAC*，平面*PAC*.

（2）*EF*是的中位线，

又，当时，，

又因为，故此时，

以*C*为原点，直线*CA*为*x*轴，直线*CB*为*y*轴，过点*C*且垂直于平面*ABC*的直线为*z*轴，建立空间直角坐标系，



则，，，，，

令平面*PAQ*的法向量为，

则，，令，则，

令平面*PQB*的法向量为，

则，，令则，

所以，因为二面角为钝角，

所以二面角的余弦值为.

18.答案：（1）

（2）在*x*轴上存在定点，使得为定值

解析：（1）由题意得，

因为，，

所以，

又，所以，解得，

所以，，

所以双曲线*C*的标准方程为.

（2）由（1）得，设，，则，

易知直线*l*的斜率不为0，设直线*l*的方程为，，

联立直线*l*与双曲线*C*的方程，消去*x*得，，

，.

因为直线*BD*的斜率，

所以直线*BD*的方程为，

若在*x*轴上存在定点*N*，使得为定值，则直线*BD*过*x*轴上的某个定点.

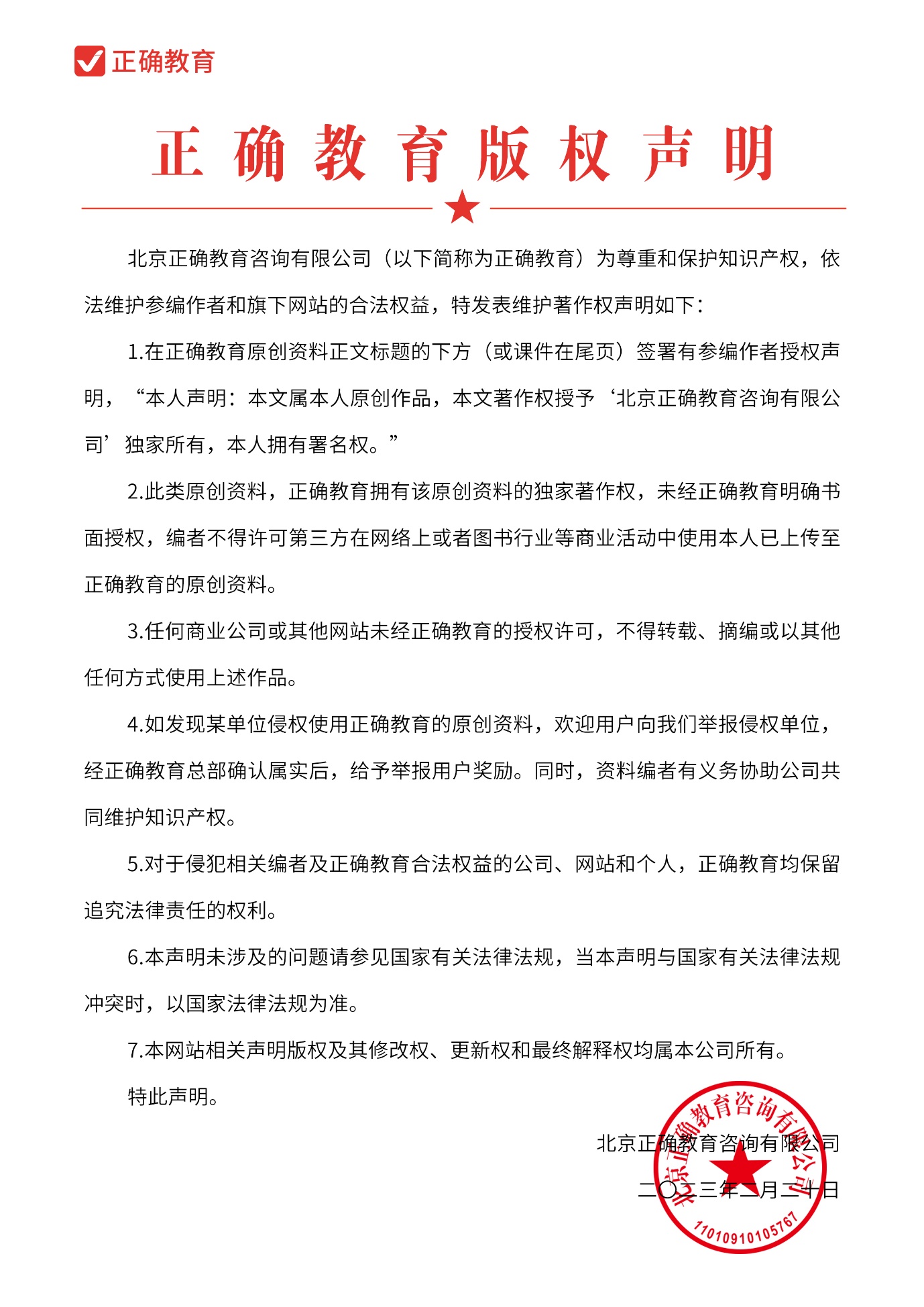
在直线*BD*的方程中，令，得，

所以直线*BD*过定点.

因为，所以为直角三角形，

取*OE*的中点，则，为定值.

综上，在*x*轴上存在定点，使得为定值.

****